CORRECTION CC2. Electrostatique 2021

TP bonus 2 points

0,5 — La densité superficielle de charges d'un conducteur chargé à l'équilibre n'est **pas** constante.

0,5 — Le champ électrique à la surface d'un conducteur est renforcé aux endroits où la courbure locale est petite. C'est l'effet de pointe.

or comme $\vec{E}_{\text{surface}} - \cancel{\vec{E}_{\text{int}}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{n}$
$\vec{0}$

0,5 — $\vec{n}$ vecteur normal à la surface. On voit que σ dépend localement de la courbure de la surface.

0,5 — Expérience de TP $\begin{cases} \to \text{Tourniquet électrostatique} \\ \to \text{Eclateur} \\ \to \text{Pointe / bougie} \end{cases}$

I

1°) Le Plan (xOy) est un plan d'anti-symétrie en tout point de ce plan $\vec{E}$ est perpendiculaire donc $\vec{E} = E_z \cdot \vec{e_z}$
au point O

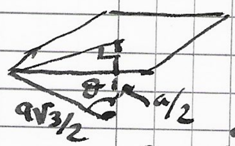
1 — $\vec{E}(0) = E_z(0)\,\vec{e_z}$ est dirigé suivant $+\vec{e_z}$
(les charges $-q$ sont en $z = +a/2$; les charges $+q$ sont en $z = -a/2$)

2 — 2°)
- On utilise le principe de superposition.
- On ne calcule que la composante du champ suivant $\vec{e_z}$
- chaque charge génère au point O le m̂ champ suivant $\vec{e_z}$

donc $E_z(0) = 8 \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \times 3a^2/4} \cdot \cos\theta$

8 charges

$\frac{1}{2}$ diagonale du cube $= a\sqrt{3}/2$



$$= \frac{8q}{3\pi\varepsilon_0 a^2}\ \frac{\cancel{a}/2}{2\cancel{a}\sqrt{3}} = +\boxed{\frac{8q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}}$$

$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{a\cdot 2}{2a\sqrt{3}}$

ou champ créé par une seule charge : (charge $-q$ placée en A $(a/2, a/2, a/2)$)

$$\vec{E_A} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{(-a/2\,\vec{e_x} - \frac{a}{2}\vec{e_y} - \frac{a}{2}\vec{e_z})}{\|\vec{AO}\|^3}$$

$\|\vec{AO}\|^2 = \frac{3a^2}{4}$

$\|\vec{AO}\|^3 = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

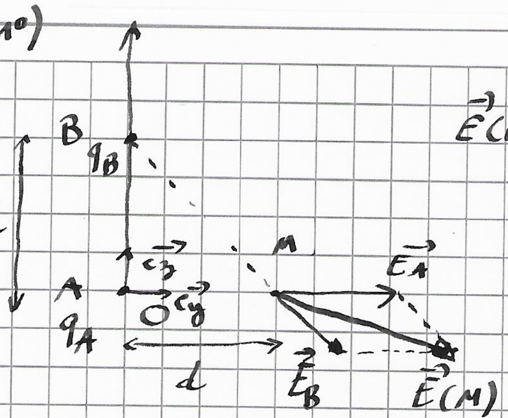
donc $E_{Az} = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{a\cdot 8}{2\ 3\sqrt{3}a^3}$

$E_{Az} = \frac{+q}{3\sqrt{3}a^2\pi\varepsilon_0}$

donc $\boxed{E_z(0) = \frac{8q}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}}$

II

1°)



$\vec{E}(M) = \vec{E_A} + \vec{E_B}$ (principe de superposition)

$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|^3}$$

1

$\vec{AM} = d\vec{e_y}$; $\|\vec{AM}\|^3 = d^3$

$\vec{BM} = d\vec{e_y} - d\vec{e_z}$; $\|\vec{BM}\|^3 = 2\sqrt{2}\, d^3$

donc $$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{d^2}\vec{e_y} + \frac{q_B}{d^2\cdot 2\sqrt{2}}\vec{e_y} - \frac{q_B}{d^2\, 2\sqrt{2}}\vec{e_z}\right)$$

2

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\cdot\left[\left(q_A + \frac{q_B\sqrt{2}}{4}\right)\vec{e_y} - \frac{q_B\sqrt{2}}{4}\vec{e_z}\right]}$$

1 2°) $\vec{E}(M)$ orienté suivant $\vec{e_z}$ si $q_A = \frac{-q_B\sqrt{2}}{4}$ ou $q_A = \frac{-q_B}{2\sqrt{2}}$

ou $q_B = -2\sqrt{2}\, q_A$ ou $q_B = \frac{-4q_A}{\sqrt{2}}$

III A

1 1°) • invariances par toute rotation autour de O → coord. sphériques

• ∀M, tous les plans contenant le vecteur $\vec{OM}$ sont plans de symétrie

donc $\vec{E}(M) = E_r\vec{e_r}$ et E_r ne dépend pas ni de θ, ni de φ

donc $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$

Gauss ou éq. locales + continuités

↳ Surface de Gauss : sphère de centre O de rayon r.

0,5

$$\Phi_{S_{gauss}} = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E_r(r)\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = E_r(r)\cdot 4\pi r^2$$

0,5 pour $\vec{E_{int}}$: $\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ donc $E_r(r) = 0$ donc $\vec{E_{int}} = \vec{0}$

0,5 pour $\vec{E_B}$: $\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}(r^3-(R-e)^3)\rho$ donc $\vec{E_B} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{(R-e)^3}{r^2}\right)\vec{e_r}$

pour $\vec{E_{ext}}$: $\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi(R^3-(R-e)^3)\rho$ donc $\vec{E_{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R^3-(R-e)^3)\vec{e_r}$

0,5

2°) Le champ ne présente pas de discontinuités car les charges sont réparties en volume.

0,5

Vérifions : si $r = R-e$ alors $\vec{E}_B = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left((R-e) - (R-e)\right)\vec{e_r}$

$= \vec{0}$

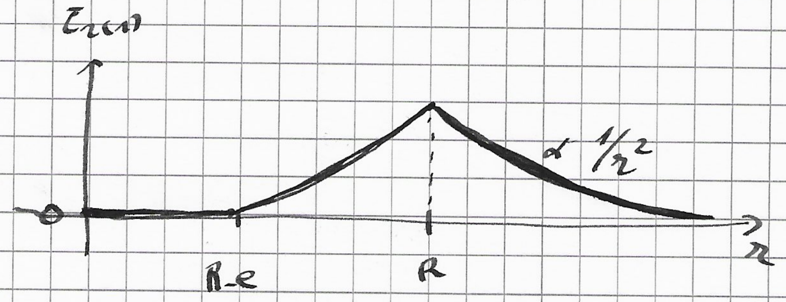
$= \vec{E}_{int}$

et si $r = R$ alors $\vec{E}_B = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R - \frac{(R-e)^3}{R^2}\right)\vec{e_r}$

et $\vec{E}_{ext}(r=R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R - \frac{(R-e)^3}{R^2}\right)\vec{e_r}$

3°)

0,5



B

1°) dans la région $R-e<r<R$ $\vec{E} = \vec{0}$ car on est à l'intérieur du conducteur à l'éq.

surface de Gauss : sphère de centre O et de rayon r / $R-e<r<R$

$\phi_{S_{gauss}} = E_r(r) \times 4\pi r^2 = 0$ car dans cette région $\vec{E} = \vec{0}$

$= \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = Q_{S_1}$ car toutes les charges du conducteur sont en surface donc ici soit en S_1 ; soit en S_2

$Q = Q_{S_1} + Q_{S_2}$

1

donc $Q_{S_1} = 0$

donc si $Q_{S_1} = 0$; $Q_{S_2} = Q$

2°) Gauss : 0,5 E_{int} : $\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ donc $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

0,5 E_{ext} : $\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ donc $\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

3°) Le champ est discontinu :

0,5

A la traversée de S_1 $\vec{E}_{B} - \vec{E}_{int} = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$ donc ici il est continu.

A la traversée de S_2 $\vec{E}_{ext} - \vec{E}_B = \vec{E}_{ext}(r=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e_r}$ ici il est discontinu

La discontinuité est égale à $Q/4\pi\varepsilon_0 R^2$

4°) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$ ici $\vec{E}_{ext} = -\vec{\text{grad}}\, V_{II}$

$$-\frac{\partial V_{II}}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow V_{II} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$$

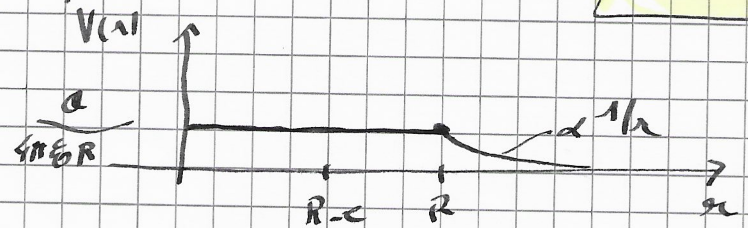
or si $r \to \infty$ $V_{II} = 0$ donc $cte = 0$

0,5 $$\boxed{V_{II} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

5°) Le potentiel est continu donc le potentiel du conducteur $V = V_{II}(r = R)$

0,5 donc $$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

0,5 6°) Le potentiel est continu donc $\boxed{V_I = V}$



Exo 4 0,5 1°) $\frac{r}{a}$ sans dimension donc a est homogène à une longueur $[m]$

2°) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$ V ne dépend que de r donc $\vec{E} = E_r\, \vec{e_r}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e_r} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} e^{-r/a}\left[-\frac{1}{a \cdot r} - \frac{1}{r^2}\right]\vec{e_r}$$

1 $$\boxed{E_r(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot e^{-r/a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)}$$

3°) S_{gauss} : sphère de centre O et de rayon r $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e_r}$

1,5 donc $\phi = 4\pi r^2 E_r = \frac{e}{\varepsilon_0} e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$

donc $\boxed{q(r) = e \cdot \left(1 + \frac{r}{a}\right) \cdot e^{-r/a}}$ (homogène à une charge)

4°) $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} e^{-r/a} \left(1+\frac{r}{a}\right) \right)$$

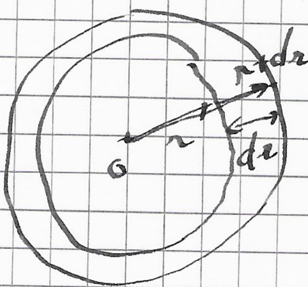
$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-r/a} \left(-\frac{1}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{a} \right)$$

1

$$= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-r/a} \frac{r}{a^2} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r \cdot a^2} e^{-r/a}$$

donc $\boxed{\rho(r) = -\dfrac{e}{4\pi r a^2} e^{-r/a}}$ bien homogène à des C/m^3

0,5 cette densité de charge locale est négative car à la distance r du noyau dans l'atome d'Hydrogène on se situe au sein du nuage électronique on retrouve donc une fraction de la charge $-e$ de l'électron.



Remarquons que :

$$q(r+dr) - q(r) \simeq V \times \rho(r)$$

ou V est le volume compris entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon r+dr.

Soit $V \simeq 4\pi r^2 dr$

donc $4\pi r^2 \rho(r) = \dfrac{q(r+dr) - q(r)}{dr}$

ainsi $4\pi r^2 \rho(r) = \dfrac{d\,q(r)}{dr}$

Vérifions : $q(r) = e \cdot \left(1+\frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$

donc $q'(r) = e \cdot e^{-r/a} \left[-\frac{1}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{a} \right] = e \cdot -\frac{r}{a^2} e^{-r/a}$

donc $\rho(r) = -\dfrac{e}{4\pi r a^2} e^{-r/a}$ on retrouve le résultat précédent.

0,5 5°) si $a \gg r$, $\frac{r}{a} \to 0$ donc $V(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$; on retrouve le potentiel généré par le proton de charge $+e$

a représente donc "vaguement" la distance de l'e^- au noyau

si l'e^- est très loin on ne ressent donc que la charge du Proton.